

## 57 狄拉克問題…對數的奧妙

諾貝爾物理獎得主狄拉克一次到哥廷根大學訪問時，正逢校內師生沈湎於一道數學題目：只用 4 個 2 及所有可利用的“數學符號”，如加、減、乘、除、乘方、開方、 $\log\cdots$ 等，將 1 到 100 的所有正整數表示出來。舉例來說

$$\begin{aligned}1 &= \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{2} \\2 &= \frac{2}{2} + \frac{2}{2} \\3 &= 2^2 - \frac{2}{2} \\4 &= 2 + \frac{2}{2} \cdot 2 \\5 &= 2^2 + \frac{2}{2} \\6 &= 2 \cdot 2^2 - 2 \\&\vdots\end{aligned}$$

在那時候，沒有人可以寫出 1 到 100 之間的所有正整數表示法。狄拉克經過一番思考之後，提出他可以解決的另一道問題：

---

只用三個 2 及運算符號表示所有的整數。

---

我們利用「 $\log_2$ 」與「 $\sqrt{\quad}$ 」將前幾個正整數表示為

$$\begin{aligned}1 &= -\log_2 \log_2 \sqrt{2} \\2 &= -\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{2}} \\3 &= -\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} \\&\vdots\end{aligned}$$

狄拉克寫出如下的表示方式：

$$n = -\log_2 \log_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{2}}}}_{n \text{ 個根號}}.$$

這個表示方式可以將所有的正整數  $n$  用三個 2 及數學符號來表示；負整數  $-n$  則可以用

$$-n = \log_2 \log_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{2}}}}_{n \text{ 個根號}}$$

表示；至於 0 可表示為

$$0 = \log_2 \log_2 2.$$